ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Абдуназаров Рабимкул
старший преподователь Джизакского филиала Национального университета Узбекистан
Маматов Аброр Номоз угли
студент, Джизакского филиала Национального университета Узбекистан

Аннотация. Рассматривается задача восстановления системы Дирака по двум спектром. Предложен эффективный алгоритм численного решения обратной задачи, реализующий дискретизированный вариант известного процедуры Гельфанда Левитана. Приводится результаты контрольных расчетов.

Ключевая слова: обратная задача для системы Дирака, процедура Гельфанда Левитана, ядро спектральной меры, собственная числа, краевая задачи для системы Дирака.

NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE DIRACK SYSTEM

Abdunazarov Rabimkul
senior teacher
rabimkulabdunazarov@gmail.com,
Маматов Аброр Номоз угли
student, Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan,
mamatov_an@gmail.com

Annotation. The problem of reconstructing the Dirac system from two spectra is considered. An efficient algorithm for the numerical solution of the inverse problem is proposed, which implements a discretized version of the well-known Gelfand Levitan procedure. The results of control calculations are given.

Keywords. inverse problem for the Dirac system, Gelfand Levitan procedure, spectral measure kernel, eigenvalues, boundary value problem for the Dirac system.

Рассмотрим оператор Дирака

$$D[Y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix} Y, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \tag{1}$$

в конечном интервале $[0,\pi]$. Здесь $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные действительные функции.

Пусть задача на собственные значения оператора

$$D[Y] = \lambda Y \tag{2}$$

при граничных условиях

$$y_1(0)\cos\alpha_0 + y_2(0)\sin\alpha_0 = 0 \tag{3}$$

$$y_1(\pi) = 0 \tag{4}$$

порождает дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а при граничных условиях

$$y_1(0)\cos\beta_0 + y_2(0)\,sin\,\beta_0 = 0$$

$$y_1(\pi) = 0$$

дискретный спектр $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Здесь α_0 , β_0 - действительные числа; кроме того, $\alpha_0 \neq \beta_0$ и $0 < \alpha_0,\ \beta_0 < \pi,\ 0 < \beta < \pi$.

Известно [1], что по спектрам $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ однозначно определяются ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ и, следовательно, по ним восстанавливаются функции $p(x),\ q(x)$.

Здесь

$$a_n = \int_0^x \{\varphi_1^2(x,\lambda_n) + \varphi_2^2(x,\lambda_n)\}\ dx,$$

причем $\varphi(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda_n)\\ \varphi_2(x,\lambda_n)\end{pmatrix}$ – собственная функция задачи (2)-(4).

В настоящей работе будет произведена численная реализация решения обратной задачи по двум наборам спектров при различных граничных условиях в одном конце интервала. Предлагаются эффективные методы вычисления опреатора (2)-(4) с некоторой точностью по данным наборам спектров $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ и $\{\mu_n\}_{-N}^{N}$. Полное решение данной задачи состоит из последовательно решаемых следующих трех подзадач:

I. Определение коэффициентов асимптотики спектре.

II. Вычисление ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ при $n < N$.

III. Вычисление ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ при $n > N$

IV. Восстановление функции $p(x)$, $q(x)$ по дискретизированному интеграла Гельфанда- Левитана.

Для проведения оценок точности вычислений будем считать, что выходные данные $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ и $\{\mu_n\}_{-N}^{N}$ нам заданы с точностью до $\varepsilon = 0(\frac{1}{N^5})$. Априорные требования на гладкость восстанавливаемого потенциала следующие: $p^{(4)}(x), q^{(4)}(x) \in L_1[0,\pi]$.

Задача I. Пусть $p^{(4)}(x), q^{(4)}(x) \in L_1[0,\pi]$. Тогда собственные значение $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ при больших n имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \frac{\alpha_4}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Нам задано $2N-1$ число $\{\lambda_n\}_{-N}^{N}$ с точностью до $\varepsilon = O\left(\frac{1}{N^5}\right)$.

Пользуясь методами разностного исчисления, определяем значения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Вычисления осуществляются по формулам[2]-[6]:

$$\alpha_4 = \frac{\Delta_2 W_N - \Delta_2 W_{\frac{N}{2}}}{G[N, N/2]} + O\left(\frac{1}{N^2}\right); \quad \alpha_1 = \frac{\Delta_2 W_{-N+2}}{2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

$$-\frac{\alpha_0}{\pi} = \frac{\Delta_2 W_N}{2} - \frac{\alpha_4}{2}\left[\frac{6N^2 - 12N + 4}{N^2(N-1)^2(N-2)^2}\right] + O\left(\frac{1}{N^6}\right),$$

$$\alpha_2 = W_N + \frac{\alpha_0}{\pi}N^2 - \frac{\alpha_4}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \alpha_3 = W_{-N+2} - \alpha_1 N^2 + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

где

$$W_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{-n}}{2}n^2, \quad W_{-n} = \frac{\lambda_n - \lambda_{-n} - 2n}{2}n^3,$$

$$\Delta_2 W_n = W_n - 2W_{n-1} + W_{n-2},$$

$$G\left(N, \frac{N}{2}\right) = \frac{6N^2 - 12N + 4}{N^2(N-1)^2(N-2)^2} - \frac{96N^2 - 384N + 256}{N^2(N-2)^2(N-4)^2} = O(\frac{1}{N^4})$$

Здесь предполагается, что N –четный.

Задача II. В наших предположениях собственные значения $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ имеют асимптотику (7), а также

$$\mu_0 = n - \frac{\beta_0}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_3}{n^3} + \frac{\beta_4}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

где константы β_i $(i = 0{,}4)$ вычисляются как указано в задаче I.

Получим рабочую формулу для вычисления $[a_n]^{-1}$ при $n < N$. Согласно [I] , восстановление ядра по двум спектрам производится формулой

$$\frac{1}{a_n} = \left[\frac{\sin(\alpha_0 - \beta_0)}{\mu_n - \lambda_n}\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n}\right]^{-1} \tag{5}$$

Можно заметить, что формула (5) содержит в себе очень медленно сходящееся бесконечное произведение и непосредственное использование этой формулы привело бы к большой потере точности. Поэтому формулу (5) необходимо преобразовать так, чтобы выражения для $[a_n]^{-1}$ не содержали бы медленно сходящих бесконечных произведений. Для этого преобразуем бесконечное произведение (сходящееся как $\sum_{k=1}^{\infty} O(\frac{1}{k^2})$) с целью убыстрения его сходимости. Введем следующие обозначения:

$$f_1(\lambda_k) = k^2 + \lambda_k\lambda_{-k} - \left(\frac{\alpha_0}{\pi}\right)^2 + 2\alpha_1, \qquad f_2(\lambda_k) = \lambda_k + \lambda_{-k} + \frac{2\alpha_0}{\pi},$$

$$\bar{\lambda}_n^2 = (\lambda_n + \frac{\alpha_0}{\pi})^2 - 2\alpha_1, \qquad \tilde{\lambda}_n^2 = (\lambda_n + \frac{\beta_0}{\pi})^2 - 2\beta_1$$

$$\Psi_1(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty}\left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2}\right],$$

$$\Psi_2(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty}\left[1 - \frac{f_1(\mu_k) - \lambda_n f_2(\mu_k)}{k^2 - \tilde{\lambda}_n^2}\right],$$

$$\Psi_3(\lambda_n) = \frac{(\lambda_n - \lambda_{-n})\left(n^2 - \tilde{\lambda}_n^2\right)(\lambda_0 - \lambda_n)\tilde{\lambda}_n \sin\left(\pi\bar{\lambda}_n\right)}{\left[n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 - f_1(\mu_n) + \lambda_n f_2(\mu_n)\right]\left(n^2 - \bar{\lambda}_n^2\right)(\lambda_n - \mu_0)\bar{\lambda}_n \sin\left(\pi\tilde{\lambda}_n\right)}.$$

После некоторой алгебраической операции над формулой (8) получим

$$a_n = \sin(\alpha_0 - \beta_0)\Psi_3(\lambda_n)\frac{\Psi_1(\lambda_n)}{\Psi_2(\lambda_n)} \tag{6}$$

С целью убыстрения сходимости произведений, встречающихся в (9), для $\Psi_1(\lambda_n)$ записываем

$$\Psi_1(\lambda_n) = exp\left\{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} ln\left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2}\right]\right\} = exp\left\{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{N} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\right\}.$$

Так как для $k > N$

$$f_1(\lambda_k) = -\frac{R_1'}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right), \qquad f_2(\lambda_k) = \frac{2\alpha_2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right),$$

имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} = \sum_{k=N+1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n\right)}\right] + O(\frac{1}{N^6}) \tag{7}$$

Здесь

$$R_1' = \alpha_1^2 + 2\alpha_3 + \frac{2\alpha_0\alpha_2}{\pi}.$$

Если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2 - a^2)k^2} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi^2}{6a^2} - \frac{\pi}{2a^3}ctg(a\pi)$$

и

$$ln\left[1 + \frac{1}{N^2(N^2 - a^2)}\right] \approx \frac{1}{N^2(N^2 - a^2)} + O(\frac{1}{N^6})$$

при больших N, для (7) имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} ln\left[1 + \frac{R_1' + 2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2 - \bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} ln\left[1+\frac{R_1'+2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right] \approx (R_1'+2\alpha_2\lambda_n)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2\right)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} ln\left[1+\frac{R_1'+2\alpha_2\lambda_n}{k^2(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2)}\right] = (R_1'+2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4}-\frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2}-\frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3}ctg(\bar{\lambda}_n\pi)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} ln\left[1+\frac{R_1'+2\alpha_2\lambda_n}{k^2(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2)}\right]+O(\frac{1}{N^6})$$

Отсюда

$$\Psi_1(\lambda_n) = exp\left\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} ln\left[1-\frac{f_1(\lambda_k)-\lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2-\bar{\lambda}_n^2}\right]-\sum_{k=1}^{N} ln\left[1+\frac{R_1'+2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right]\right.$$

$$\left.+(R_1'+2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4}-\frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2}-\frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3}ctg(\bar{\lambda}\pi)\right]\right\} =$$

$$=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N}\left[1-\frac{f_1(\lambda_k)-\lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2-\bar{\lambda}_n^2}\right]/\prod_{k=1}^{N}\left[1+\frac{R_1'+2\alpha_2\lambda_n}{k^2\left(k^2-\bar{\lambda}_n{}^2\right)}\right]\times$$

$$\times exp\left\{(R_1'+2\alpha_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n{}^4}-\frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n{}^2}-\frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n{}^3}ctg(\bar{\lambda}\pi)\right]\right\}$$

Аналогично вычисляется и $\Psi_2(\lambda_n)$. Получим:

$$\Psi_2(\lambda_n)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N}\left[1-\frac{f_1(\mu_k)-\lambda_n f_2(\mu_k)}{k^2-\tilde{\lambda}_n^2}\right]/\prod_{k=1}^{N}\left[1+\frac{R_1+2\beta_2\lambda_n}{k^2(k^2-\tilde{\lambda}_n^2)}\right]\times$$

$$\times exp\left\{(R_1+2\beta_2\lambda_n)\left[\frac{1}{2\tilde{\lambda}_n{}^4}-\frac{\pi^2}{6\tilde{\lambda}_n{}^2}-\frac{\pi}{2\tilde{\lambda}_n{}^3}ctg(\tilde{\lambda}_n\pi)\right]\right\}$$

Подставляя вычисленные значения $\Psi_1(\lambda_n)$ и $\Psi_2(\lambda_n)$ в (9), получим рабочие формулы для вычисления $[a_n]^{-1}$ при $n<N$. Здесь

$$R_1=\beta_1^2+2\beta_3+\frac{2\beta_0\beta_2}{\pi}.$$

Задача III. Асимптотика спректральной меры $[a_n]^{-1}$ задачи (2)-(4) при больших *n* имеет следующую асимптотику [1],[2]

$$[a_n]^{-1}=n-\frac{c_0}{\pi}+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3}+\frac{c_4}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Отклоняясь от классического метода (например [7], [8]), для определения коэффициентов асимптотики приступим по следующему:

- Определяем по формулу (9) первые $2N-1$ значения чисель $[a_n]^{-1}$ с точностью до $\varepsilon = O\left(\frac{1}{N^5}\right)$, где $-N < n < N$.

- Аналогично, как в пункте Задачи I, пользуясь методами разностного исчисления, определяем значения c_0, c_1, c_2, c_3, c_4.

Задача IV. По имеющийся данными λ_n, μ_k и $[a_n]^{-1}$, решая дискретизированную интегральную уравнению Гельфанда -Левитана определяется значения функций $p(x)$ и $q(x)$ в интервале $[0, \pi]$. Это задача аналогично решается как показано в работе [2],[6].

Литература:

1. Б.М.Левитан. И.С.Саркисян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва (МГУ). 1984 г.

2. Rabimkul A. NOKORREKT SHARTLARDA SHTURM-LIUVILL OPERATORI PARAMETRLARINI TIKLASH MASALALARI //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2022. – С. 24-28.

3.Abdunazarov R. Issues of effective organization of practical classes and clubs in mathematics in technical universities. Mental Enlightenment Scientific-Methodological Journal. Current Issue: Volume 2022, Issue 3 (2022) Articles.

4. Rabimkul A., Haydarovich H. O. Calculating The Volume Of Liquid In Cylinder Vessels Which Have Curved Borders Level 2 Geometric Surface //The American Journal of Applied sciences. – 2021. – Т. 3. – №. 12. – С. 16-21.

5. Рабимкул, А., Иброҳимов, Ж. Б. ў., Пўлатов, Б. С., & Нориева, А. Ж. қ. (2023). АРГУМЕНТЛАРНИ ГУРУҲЛАРГА АЖРАТИБ БАҲОЛАШ УСУЛИДА КЎП ПАРАМЕТРЛИ НОЧИЗИҚЛИ РЕГРЕССИЯ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ҚУРИШ МАСАЛАЛАРИ. *Educational Research in Universal Sciences*, *2*(2), 174–178. Retrieved from http://erus.uz/index.php/er/article/view/1704

6. Абдуназаров Р. Штурм–лиувилл оператори учун тескари масалани сонли усулда ечиш муаммолари //Современные инновационные исследования актуальные проблемы и развитие тенденции: решения и перспективы. – 2022. – Т. 1. – №. 1. – С. 369-372.

7. Абдуназаров Р. О численной реализация решения обратной спектральной задачи для оператора Дирака. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Выпуск 95. Ташкент. 1993. Стр. 10-20.

8. А.И. Аптекарев. О численной реализации решения обратной задачи Штурма-Лиувилля. Препринт ИПМ № 32, Москва, 1982 г.